

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
Processus stochastiques

STT 489

Examen intra été 2010

Chargé de cours : Djilali Ait Aoudia

Jeudi 17 juin 2010 - durée 2 heures - sans document ni calculatrice

Exercice 1 (20 points)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et équadistribuées de densité f_{X_1} . On pose

$$U_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad V_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

- a) Déterminer la densité de U_n .
- b) Déterminer la densité de V_n .

Exercice 2 (35 points)

Soit $(N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $(W_t^\alpha, t \geq 0)$ le processus stochastique à temps continu tel que pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$:

$$W_t^\alpha = e^{\alpha N_t + \lambda t(1 - e^\alpha)}$$

- a) Définissez ce qu'on entend par le processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$.
- b) Soit Y une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}(e^{\alpha Y})$ pour tout réel α .
- c) Montrer que pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour $0 < s \leq t$

$$\mathbb{E}[W_t^\alpha | N_s] = W_s^\alpha.$$

- d) Calculer

$$\text{Cov}(N_t, N_s) \quad \text{pour} \quad 0 < s < t.$$

e) Soit X_0 une variable aléatoire indépendante de processus $(N_t, t \geq 0)$ telle que $\mathbb{E}[X_0] = 0$ et $\mathbb{E}[X_0^2] = \sigma^2 > 0$. On pose

$$Z_t = X_0(-1)^{N_t}$$

Calculer

- a) $\mathbb{E}(Z_t)$.
- b) $\text{Cov}(Z_t, Z_s)$ pour $0 < s < t$.

Exercice 3 (25 points)

Soient deux réels p et λ ($0 < p < 1$ et $\lambda > 0$) et (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que la loi de Y est de Poisson de paramètre λ , la loi de X conditionnée par $[Y = y]$ est binomiale de paramètre (y, p) .

- a) Montrer que la loi de X est une loi de Poisson de paramètre λp .
- b) Montrer que la loi de $Y - X$ est une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1 - p)$.
- c) Soit $A = \mathbb{V}\text{ar}(X)$. Calculer $B = \mathbb{E}(\mathbb{V}\text{ar}(X|Y))$ et $C = \mathbb{V}\text{ar}(\mathbb{E}(X|Y))$. Vérifier que $A = B + C$ dans le cas présent.

Exercice 4 (20 points)

Soient Y une variable aléatoire de loi normale centrée réduite ($Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires telles que :

Conditionnellement à $[Y = y]$, les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n, (n \geq 1)$ sont indépendantes et équidistribuées de loi normale d'espérance y et de variance 1 (c-a-d. $X_i|Y = y \stackrel{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(y, 1), i = 1, 2, \dots, n$). On pose

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

- a) Déterminer la loi de S_n .
 - b) Déterminer $\mathbb{E}[S_n]$.
- (On rappelle qu'on a $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \mathbb{E}[e^{tZ}] = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}$)